УДК 622.831.3.0015

Д.Л. Васильев, к. т.н.,
Ю.М. Ус, инж.,
(ИГТМ)
А.А. Ангеловский инж.,
А.А. Потапенко инж.
(ОАО "Краснодонуголь")

РАСЧЕТ ПРЕДЕЛА ПРОЧНОСТИ ОБРАЗЦОВ ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ ИХ РАЗРУШЕНИИ В ВИДЕ УСЕЧЕННЫХ ПИРАМИД С УЧЕТОМ КОНТАКТНОЙ ЗОНЫ ПРИЛИПАНИЯ.

У роботі враховано диференціальне та алгебраїчне рівняння рівноваги для різних значень коефіцієнтів контактного тертя з врахуванням його експериментальної закономірності від навантаження. Одержана задовільна збіжність розрахункової межі міцності зразків гірських порід при їх одноосному стисненні з експериментальними даними

CALCULATION OF LIMIT OF STRENGTH SAMPLES OF ROCK AT THEIR DESTRUCTION AS THE TRUNCATED PYRAMIDS TAKING INTO ACCOUNT THE CONTACT AREA OF ADHESION.

In this work differential and algebraic balance equations are taken into account for different values of coefficients of contact friction taking with a subject to his experimental conformity to the law from loading. The satisfactory convergence of calculated breaking point of the rock strength sample at their uniaxial compression with experimental information is obtained.

В работе [1] разработан метод расчета предела прочности на сжатие образцов горных пород при постоянном значении контактного касательного напряжения. Однако авторами не учтены дифференциальные и алгебраическое уравнения равновесия, которые, как известно обязательны для всех точек деформируемого тела. Кроме того, не учтено влияние на предел прочности образцов контактной зоны прилипания.

Для исключения этих пробелов при решении поставленной задачи оговорим граничные условия. В качестве исходного объекта возьмем выпуклый вследствие деформирования образец (рис. 1), удовлетворяющий условиям парности касательных напряжений в угловых областях. Сжимающие напряжения принимаем положительными. Знаки касательных напряжений: на верхней левой вертикальной половине – положительные, на верхней правой – отрицательные. На нижних половинах знаки имеют противоположные значения.

Теперь запишем при заданных осях координат дифференциальные уравнения равновесия для плоской деформации [2]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

где σ_x, σ_y τ_{xy} – нормальные и касательные напряжения, x, y – координаты.

Присовокупим к этим дифференциальным уравнениям алгебраическое уравнение равновесия [3]

$$\sigma_x = \frac{2(k_n + \mu\sigma_y)}{\cos\rho}\left(\sin\rho - \sqrt{1-b_a^2}\right) + \sigma_y, \qquad (3)$$

где k_n – предел сопротивляемости породы сдвигу; μ и ρ – коэффициент и угол внутреннего трения породы; $b_a = \frac{\tau_к}{k_n + \mu\sigma_y}$ - параметр трения, $\tau_к$ - контактное касательное напряжение.

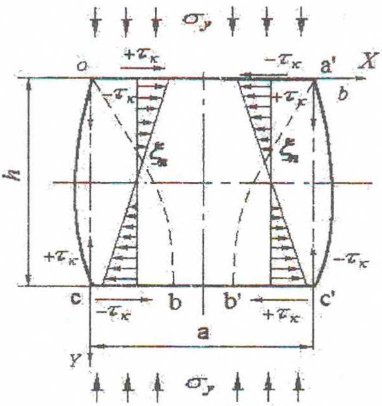


Рис. 1. Схема контактных нагрузок в образце горной породы при наличии внешнего трения

Следует отметить, что у исследователей [2] в смежной области – обработки металлов давлением возникли непреодолимые трудности точного интегрирования дифференциальных уравнений равновесия совместно с условием предельного состояния при наличии трения, вследствие чего они были вынуждены вводить упрощающие предпосылки, в частности, принимать, что нормальные напряжения зависят только от одной из координат. В результате число дифференциальных уравнений сокращается до одного, которое будет содержать простые производные вместо частных. Как правило, задачу решают при предельном значении контактного касательного напряжения τ_k, равного пределу сопротивления материала сдвигу k_n. В этом случае получено соотношение $\frac{d\sigma_y}{dx} = \frac{d\sigma_x}{dx}$. В области обработки металлов этого достаточно, так они ограничивают свое решение определением максимального контактного удельного усилия деформирования. Проверка на экспериментальных данных таким образом полученного приближенного метода расчета деформирующих усилий подтвердила его вполне удовлетворительную практическую точность. Поскольку нас интересует связь между напряжениями внутри материала, т.е. при изменении касательных напряжений τ_k по мере удаления от контактной поверхности для построения в последующем запредельных кривых разрушения возникает необходимость определения упомянутого соотношения не только на контактной поверхности, но и внутри тела, при этом когда $\tau_k < k_n$.

Касательные напряжения τ_{xy} по мере удаления от контактной поверхности по абсолютной величине уменьшаются и при y=0,5 обращается в нуль, как на оси симметрии. Допустим, что напряжения τ_{xy} является линейной функцией оси y, т.е.

$$\tau_{xy} = \tau_{\kappa}\left(1 - \frac{2Y}{h}\right). \tag{4}$$

Тогда

$$\frac{d\tau_{xy}}{dy} = -\frac{2\tau_{\kappa}}{h}. \tag{5}$$

Теперь найдем связь между производными $\frac{d\sigma_y}{dx}$ и $\frac{d\sigma_x}{dx}$ при любых соотношениях τ_{xy}. Для этого продифференцируем выражение (3) по x

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \left[\frac{2\mu}{\cos\rho}\left(\sin\rho - \sqrt{1 - {b_a}^2}\right) + 1\right]\frac{d\sigma_y}{dx} + \frac{2\left(k_n + \mu\sigma_y\right)\cdot b_a}{\cos\rho\sqrt{1 - b_a^2}} \cdot \frac{db_a}{dx}, \tag{6}$$

где параметр $b_a = \dfrac{f\sigma_y}{k_n + \mu\sigma_y}$.

Производная от b_a по x равна

$$\frac{db_a}{dx} = \frac{f - \mu b_a}{k_n + \mu\sigma_y} \cdot \frac{d\sigma_y}{dx}. \tag{7}$$

Тогда выражение (6) будет иметь окончательный вид

$$\frac{d\sigma_x}{dx}=\left(1+2\mu^2+\frac{2bf-2\mu}{\cos\rho\cdot\sqrt{1-b_a^2}}\right)\frac{d\sigma_y}{dx}.$$

Обозначим выражение в скобках через u. Тогда

$$\frac{d\sigma_y}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\frac{d\sigma_x}{dx}. \tag{8}$$

Используя первое дифференциальное уравнение (1) и выражения (5) и (8), имеем

$$\frac{d\sigma_y}{dx}=\frac{2\tau_\kappa}{uh}. \tag{9}$$

Из решения уравнения (9) имеем

$$\sigma_y=\frac{2\tau_\kappa}{u\cdot h}\cdot x+c.$$

Учитывая, что при $x=0$ постоянная интегрирования $c=\sigma_{y_0}$, получаем

$$\sigma_y=\sigma_{y0}+\frac{2\tau_\kappa}{u\cdot h}\cdot x.$$

Теперь следует определиться с описанием значения τ_k.

По этому поводу многие специалисты [2] в области обработки металлов пишут, что при увеличении предельного давления деформация контактной поверхности, необратимо приближающая действительную площадь к номинальной, обуславливает потерю линейной зависимости сил трения от нормальной нагрузки. Поэтому ряд исследователей рекомендовали принимать трение независимым от нормальной нагрузки, а коэффициент контактного трения f принимать по пределу прочности, равным f_s.

Из рис. 1 можно увидеть, что на вертикальной линии симметрии контактной плоскости трение меняет знак. Очевидно, что это изменение не может осуществиться скачком. Аппроксимируем это изменение линией. Ширину этого изменения согласно экспериментальным данным по металлу [2] принимаем равным 0,1 ширины образца, т.е. $0{,}1\,a$. Эту ширину S принято называть зоной прилипания. Остальная часть контактной плоскости образца называется зоной торможения. В общем случае эпюры нормальных и касательных напряжений состоят из двух участков (рис. 2).

Теперь определим закономерности контактных касательных и нормальных напряжений по контактной зоне торможения. На первом участке τ_κ сохраняет постоянную величину, а σ_y растет по прямой.

$$\tau_\kappa = f_s \cdot \sigma_{y_0} . \tag{10}$$

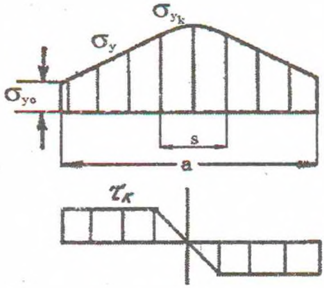


Рис.2. Эпюры контактных нормальных и касательных напряжений

Тогда

$$\sigma_y = \sigma_{y0}\left(1 + 2 f_s \cdot x/(u \cdot h)\right). \tag{11}$$

Суммируя нормальные напряжения на контактной поверхности по ширине их действия, находим полное давление. Разделив полученное значение на эту ширину, находим удельное давление – предел прочности

$$P_1 = \sigma_{y0}\left((a-s) + \frac{f_s \cdot (a-s)^2}{2h \cdot u}\right). \tag{12}$$

$$p_1 = \frac{P_1}{a} = \frac{\sigma_{y0}}{a}\left((a-s) + \frac{f_s \cdot (a-s)^2}{2h \cdot u}\right). \tag{13}$$

На втором участке τ_κ изменяется по наклонной прямой, проходя через нуль, а σ_y изменяется по параболе, имея максимум на оси полосы. Контактные напряжения не имеют скачкообразного изменения при переходе через середину полосы на контактной поверхности и изменяются по линейному закону

$$\tau_\kappa = f_s \cdot \sigma_{y_k} \cdot x_3 , \tag{14}$$

$$\frac{d\sigma_{y_3}}{dx} = \frac{2 f_s \sigma_{y_k} x_3}{uh} , \tag{15}$$

$$\sigma_{y_3} = \frac{f_s \sigma_{y_k}}{2uh} \cdot {x_3}^2 + C \tag{16}$$

где x_3 - абсцисса зоны прилипания.

Учитывая, что при $x_3 = 0$ постоянная интегрирования σ_{y_k}, получаем

$$\sigma_y = \frac{f_s \sigma_{y_k}}{2uh} \cdot {x_3}^2 + \sigma_{y_k},$$

где σ_{y_k} - максимальное значение нормального напряжения зоны торможения.

Тогда

$$P_2 = \sigma_{y_k} \left(s + \frac{f_s \cdot s^3}{6uh} \right), \tag{17}$$

$$p_2 = \frac{P_2}{a} = \sigma_{y_k} \left(\frac{s}{a} + \frac{f_s \cdot s^3}{6uha} \right). \tag{18}$$

Определение нормальных напряжений σ_{y_0} в работе [1] осуществляют с использованием критерия Кулона

$$\tau_{эф} = \tau_\alpha - \mu \sigma_\alpha, \tag{19}$$

где $\tau_{эф}$ - эффективное касательное напряжение на наклонной площадке по траектории максимальных касательных напряжений (линии скольжения);

μ - коэффициент внутреннего трения;

σ_α - нормальное напряжение на наклонной площадке по линии скольжения $\xi_л$ (рис. 1).

При $\tau_{эф} \geq k_n$ (сопротивление сдвигу) с учетом выражения (19) получим дифференциальное выражение по типу известного в теории пластичности уравнения Генки [2].

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2 \cdot (k_n + \mu \sigma_\alpha), \tag{20}$$

где α - угол наклона линии скольжения, на которой эффективные касательные напряжения имеют максимальные значения.

Решение уравнения (20) сводится к решению интеграла на линии скольжения ξ между точками a и b.

$$\int_{\sigma_{\alpha_b}}^{\sigma_{\alpha_a}} \frac{d(k_n + \mu\sigma_\alpha)}{\mu} = 2\int_{\sigma_{\alpha_b}}^{\sigma_{\alpha_a}} d\alpha. \tag{21}$$

Подробное решение интеграла дано в работе [1]. Приведем некоторые фрагменты этого решения.

Нормальное решение в точке a будет:

$$\sigma_{\alpha_a} = \sigma_{y0}(1 - \sin\rho\sqrt{1-b_a^2}) - k_n\cos\rho\sqrt{1-b_a^2}, \tag{22}$$

а в точке b –

$$\sigma_{\alpha_b} = k_b\cos\rho\sqrt{1-b_b^2} \tag{23}$$

где ρ - угол внутреннего трения, равный $\rho = arctg\mu$;

$$b_a = \frac{f\sigma_{y0}}{(k_n + \mu\sigma_{y0})}, \qquad b_b = \frac{f\sigma_{y0}}{(k_b + \mu\sigma_{y0})}.$$

Угол α в точке a

$$\alpha_a = \frac{\pi}{4} + \rho/2 + \beta_a,$$

а в точке b

$$\alpha_b = \frac{\pi}{4} + \rho/2 + \beta_b,$$

где β_a и β_b - углы поворота линии скольжения от внешнего трения в точках a и b.

Угол $\beta_a = \frac{1}{2}arctg\frac{b_a\cos\rho}{\sin\rho - \sqrt{1-b_a^2}}$, угол $\beta_b = -\frac{1}{2}arctg\frac{b_b\cos\rho}{\sin\rho - \sqrt{1-b_b^2}}$.

Общий угол поворота линии скольжения между точками a и b с учетом знаков β_a и β_b будет

$$\alpha_{ab} = \beta_a + \beta_b . \tag{24}$$

Тогда, решая интеграл (21), имеем

$$\begin{cases} \sigma_{y_o} = \dfrac{1}{\mu}\left[\dfrac{k_n \cdot (1+\sin\rho\sqrt{1-b_a^2}) \cdot e^{2\mu(\beta_a+\beta_b)}}{1-\sin\rho\sqrt{1-b_b^2}} - k_b \right] \\ k_b = \dfrac{(k_n + \mu\sigma_{y0})(1-\sin\rho\sqrt{1-b_b^2})}{(1+\sin\rho\sqrt{1-b_a^2}) \cdot e^{2\mu(2\beta_b)}} \end{cases} \tag{25}$$

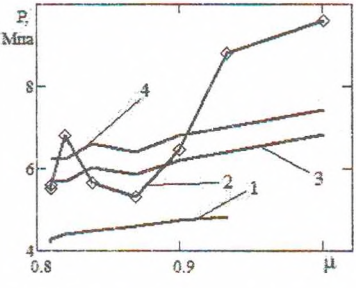
На основании выражений (13), (18), (25) находим удельное давление, фиксируемое на прессе при раздавливании образцов горных пород при одноосном нагружении согласно.

Таблица.Сравнение расчетных значений предела прочности с экспериментальными данными

Порода	$P_{эксп}$, мПа	k_n, мПа	ρ, Град.	μ	$P_{расч}$ при $f_s=0,15$ мПа	Ошибка при $f_s=0,15$ %	$P_{расч}$ при $f_s=0,25$ мПа	Ошибка при $f_s=0,25$ %
Роговик	1380	2,5	39	0,809	1423	3,02	1559	11,48
Руда гранат - магнетит	1170	2,2	40	0,839	1288	9,16	1411	17,08
Руда эпидот-магнетит	960	1,0	45	1	682	28,95	743	22,6
Скарн гранатовый	1120	2.0	39	0,809	1139	1,66	1247	10,18
Скарн гранат магнетитовый	970	1,5	42	0,90	931	4,02	1018	4,71
Скарн магнетит гранатовый	680	1.00	39	0,809	569	16,32	624	8,23
Аргиллит	300	0,53	41	0,82	319	5,95	350	14,28
Песчаник темный	1550	1,76	43	0,9325	1126	27,54	1230	20,64

Теперь проведем сопоставление расчетных результатов при различных значениях коэффициентов внешнего и внутреннего трения с экспериментальными данными, которые позаимствованы из кадастра [4], и сведем их в таблицу.

Важно отметить, что прочность образца существенно зависит от угла β_b, т.е. от параметра b_b. Если линия скольжения попадает в зону прилипания, то снижается предел прочности из-за снижения параметра b_b. Поэтому нарушается линейность зависимости предела прочности горных пород от контактного и внутреннего трения.



1- f_s=0; 2- экспериментальная кривая; 3- f_s=0.15; 4- f_s=0.25

Рис.3. Зависимости предела прочности образцов горных пород (р) при k=1.0 от коэффициента внутреннего трения (μ):

Выводы:

На основании расчета можно сделать вывод, что учет зоны прилипания при одноосном сжатии образцов обеспечивает повышение достоверности расчета при от коэффициента трения при 0,8<μ<0,9. Сходимость расчетных результатов с экспериментальными данными при внешнем трении $f_S = 0{,}15$ составляет 12,07%, при $f_S = 0{,}25$ - 13,65 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Л.М. Метод расчета предела прочности при трехосном сжатии образцов горных пород и постоянном значении контактных касательных напряжений. / Л.М. Васильев, Д.Л. Васильев, Р.Н. Наривский, А.А Потапенко // Геотехническая механика. Межвед сб. научн. тр. – Днепропетровск, 2009. – Вып. 82. – С. 9-17.

2. Громов М.П. Теория обработки металлов давлением. – М.: Металлургия, 1967. – 340 с.

3. Васильев Д.Л. Закономерности формирования горизонтальных нормальных напряжений в массиве горных пород / Васильев Д.Л. // Геотехническая механика. Межвед сб. научн. тр. – Днепропетровск, 2001. – Вып. 29. – С. 17-21.

4. Мельников Н.В., Ржевский В.В., Протодьяконов М.М. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород. – М., «Недра», 1975. – 279 с.